

# Über die Verschiebung zylindrischer Lichtbögen ohne Materiebewegung<sup>\*,\*\*</sup>

JÜRGEN RAEDER

Elektrophysikalisches Institut der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforsch. 23 a, 424—432 [1968]; eingegangen am 12. Mai 1967)

An electric arc may be displaced by a magnetic field, by a gas flow and also by unsymmetric heating and cooling. This occurs for instance, if a portion of the wall of a wall-stabilized arc is heated. For this case the displacement is investigated theoretically for steady state conditions. Furthermore the deflection is calculated for an explicit dependence of electrical and thermal conductivity upon a space variable. The different possibilities considered in theory are realized experimentally. The measurements are in good agreement with the theoretical results.

## 1. Problemstellung

Der elektrische Lichtbogen bietet sich dem Auge als eine Leuchterscheinung dar, deren räumliche Intensitätsverteilung ein Ausdruck für das zugeordnete Temperaturprofil ist. Unter Verschiebung eines Lichtbogens soll daher die Verlagerung des Isothermensystems verstanden werden. Daß sich die Verteilung dabei im allgemeinen auch deformiert, soll in der folgenden qualitativen Betrachtung unberücksichtigt bleiben. Für die Verschiebung eines in seiner Längsrichtung homogenen Lichtbogens gibt es zwei voneinander unabhängige Ursachen. Zum einen kann das heiße Bogengas mit seiner Umgebung seitlich bewegt werden, wobei sich der Bogen, gekennzeichnet durch sein Temperaturfeld, natürlich mitbewegt. Eine solche Materieströmung kann beispielsweise durch seitliche Bewegung der Kammer, in welcher der Bogen brennt, erfolgen, oder durch Anblasung eines zwischen Schienenelektroden beweglichen Bogens. Zum anderen kann bei ruhendem Gas die eine Seite des Bogens aufgeheizt und die andere gleichzeitig abgekühlt werden, wodurch ebenfalls eine seitliche Verlagerung des Temperaturprofils bewirkt wird. Für diesen Mechanismus muß offenbar eine Unsymmetrie der Leistungsbilanz vorliegen, die ihrerseits wieder in einer unsymmetrischen Energiezu- oder -abfuhr begründet ist. Die damit parallel laufenden Ausgleichsströmungen sollen hier vernachlässigt werden.

Die zweite Art der Verschiebung von Lichtbögen durch eine unsymmetrische Leistungsbilanz bei im wesentlichen ruhender Materie soll im folgenden näher

her untersucht werden, und zwar sowohl bei inhomogener Leistungszufuhr als auch bei inhomogener Leistungsabfuhr.

## 2. Gleichungen

Wegen der Voraussetzung verschwindender Materiegeschwindigkeit vereinfacht sich die Energiebilanz für den Bogen bei Vernachlässigung der Abstrahlung zu

$$\operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) + \sigma E^2 = c_p \gamma \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

( $\kappa$  = Wärmeleitfähigkeit,  $\sigma$  = elektrische Leitfähigkeit,  $T$  = Temperatur,  $E$  = elektrische Feldstärke,  $c_p$  = spezifische Wärme bei konstantem Druck,  $\gamma$  = Gasdichte).

Wenn  $\kappa$  nur von der Temperatur abhängt, kann das Wärmestrompotential

$$S(T) = \int_{T_0}^T \kappa(T) dT \quad (2)$$

in die Energiegleichung eingeführt werden:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} S + \sigma E^2 = \frac{c_p \gamma}{\kappa} \frac{\partial S}{\partial t} \quad (3)$$

In dem speziellen Fall eines zylindrischen Rohres mit der konstanten Wandtemperatur  $T_w$  stellt sich im Gleichstrombetrieb ein stationärer, zylindersymmetrischer Bogen ein, für den Gl. (3) mit verschwindender rechter Seite gilt.

## 3. Verschiebung durch einseitige Wandheizung

Als erstes möge die Verschiebung eines zylindrischen Bogens durch inhomogene Energieabfuhr, die

\* Auszug aus der von der Fakultät für Maschinenwesen und Elektrotechnik der Technischen Hochschule München zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs genehmigten Dissertation. Tag der Promotion: 21. 2. 1967.

\*\* Auszugsweise auch vorgetragen auf der Frühjahrstagung des Fachausschusses Plasma- und Gasentladungsphysik der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Aachen 1967.



durch einseitige Wandaufheizung bewirkt wird, behandelt werden. Durch diese Maßnahme wird der Temperaturabfall zwischen Maximum und geheizter Wand abgeflacht und dadurch die Wärmeableitung in dieser Richtung vermindert. Die Folge ist eine Verschiebung des Temperaturmaximums, dessen Lage wir als repräsentativ für den ganzen Bogen ansehen wollen, zur geheizten Wand hin. Dieser Vorgang wird dadurch beendet, daß die durch ihn bewirkte Aufsteilung des Temperaturprofils zu steigenden Energieverlusten führt, die schließlich die neue Gleichgewichtslage bestimmen. Reihen wir nun viele kleine, langsame Erhöhungen der Wandtemperatur der geheizten Stelle aneinander, so bewirken wir dadurch eine Verschiebung des Bogens, deren Geschwindigkeit durch die zeitliche Änderung der Temperaturstörung auf der Wand bestimmt wird. Der Vorgang ist in diesem Zusammenhang dann als langsam zu betrachten, wenn die relative Änderung der Wandtemperatur klein ist in der Zeit, die das System benötigt, um sich nach einer Änderung der Wandtemperatur auf das neue Gleichgewicht einzustellen. Zur quantitativen Beschreibung dieses Vorgangs muß zunächst die Gleichgewichtslage des Temperaturmaximums in Abhängigkeit von der Größe einer lokalen Aufheizung der Wand berechnet werden.

### 3.1. Verschiebung der zylindersymmetrischen Lösung

Mathematisch gesehen wird die Verschiebung des Bogens durch eine Änderung der Randbedingung für die Energiegleichung bewirkt. Im stationären Fall lautet die Energiegleichung (3) in Zylinderkoordinaten für einen Bogen ohne Zylindersymmetrie:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial S}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} + (ER)^2 \sigma(S) = 0 \quad (4)$$

( $\varrho = r/R$  und  $R = \text{Rohrradius}$ ).

Diese Differentialgleichung ist vom elliptischen Typ, ihre Lösungen werden durch die Randwerte bei  $\varrho = 1$  und durch eine weitere Bedingung (z. B. Vorgabe des Bogenstromes  $I$  oder der Leistung pro Längeneinheit  $L = EI$ ) zur Festlegung des Parameters  $E$  eindeutig bestimmt. Da  $\sigma$  im allgemeinen eine nichtlineare Funktion von  $S$  ist, kann man die Lösungen der Gl. (4) nur in sehr wenigen Fällen analytisch berechnen. Um diesen Schwierigkeiten zunächst aus dem Weg zu gehen, kann man die Tatsache verwenden, daß für viele Gase die elektrische

Leitfähigkeit  $\sigma(S)$  unterhalb eines von der Gasart abhängigen Schwellwertes  $S_1$  in guter Näherung vernachlässigbar ist. Die zylindersymmetrische Lösung von Gl. (4) für den nichtleitenden Außenbereich  $\varrho \geq \varrho_1$  ( $\varrho_1 = \text{Radius der Isotherme } S = S_1$ ) lautet dann ganz unabhängig von der Gasart:

$$S(\varrho) = -\frac{L}{2\pi} \ln \varrho + S_w \quad \text{für } \varrho \geq \varrho_1 \quad (5)$$

( $S_w = \text{Wert des Wärmestrompotentials auf der Wand } \varrho = 1$ ).

In einer graphischen Darstellung der Lösung (5) bilden die Isothermen (Iso- $S$ -Kurven) eine Schar konzentrischer Kreise. Zeichnet man in dieses Bild einen Einheitskreis ein, der um  $\varrho_e$  gegenüber dem Zentrum der konzentrischen Schar verschoben ist, so schneidet dieser einen Teil der Isothermen.

Die Strecke  $\varrho_e$  sei hinreichend klein gewählt, so daß der Kreis die Isotherme  $S = S_1$  noch nicht schneidet. Denkt man sich den neuen Kreis durch eine materielle Wand ersetzt, auf der gerade die durch die Schnittpunkte mit den Isothermen festgelegte Temperaturverteilung herrscht, so wird der Bogen durch die Existenz dieser neuen Rohrwand nicht gestört. Von einem Koordinatensystem aus, das in der Mitte des neuen Rohres zentriert ist, entspricht die Lösung (5) nicht mehr dem zylindersymmetrischen Fall, sondern sie ist gerade die Lösung eines der zu untersuchenden Randwertprobleme. Wenn die neuen Koordinaten wieder mit  $\varrho$  und  $\varphi$  bezeichnet werden, lautet die Randverteilung  $S(1, \varphi)$ , abhängig von der Exzentrizität  $\varrho_e$ :

$$S(1, \varphi) - S_w = -\frac{L}{4\pi} \ln(1 + \varrho_e^2 - 2\varrho_e \cos \varphi). \quad (6)$$

Für kleine  $\varrho_e$  erhält man für die Abweichung  $S^* = S - \bar{S}$  vom Mittelwert von  $S$  auf dem Rand  $\varrho = 1$  in linearer Näherung:

$$S^*(1, \varphi) = S_a \cos \varphi, \quad \text{für } \varrho_e \ll 1. \quad (7a)$$

$$\varrho_e = 2\pi S_a / L, \quad (7b)$$

In dieser Näherung für kleine Verschiebungen ist also die Exzentrizität  $\varrho_e$  der Amplitude  $S_a$  einer cos-förmigen Störung der Wandtemperatur direkt, der Leistung  $L$  umgekehrt proportional. Die Kenntnis der Verschiebung abhängig von der Größe einer cos-förmigen Störung hat für das gesamte Problem eine grundsätzliche Bedeutung, da man jede Randverteilung von  $S$ , die einer einseitigen Heizung entspricht, in eine Fourier-Reihe mit cos-förmiger Grundwelle entwickeln kann.

Für den einfachen Fall nach den Gln. (7 a) und (7 b) läßt sich bereits die Geschwindigkeit  $v$  des Bogens bei zeitlich langsam wachsender Amplitude  $S_a$  der cos-förmigen Wandverteilung des Wärmestrompotentials angeben:

$$v = \frac{dr_e}{dt} = R \frac{d\varrho_e}{dt} = R \frac{d\varrho_e}{dS_a} \frac{dS_a}{dt} = \frac{2\pi R}{L} \frac{dS_a}{dt} = \frac{2\pi R \kappa(T_a)}{L} \frac{dT_a}{dt}. \quad (8)$$

Der Faktor  $R d\varrho_e/dS_a = 2\pi R/L$  vor  $dS_a/dt$  (der Ursache der Bogenbewegung) kann als Beweglichkeit des Bogens bezeichnet werden. Geht man schließlich wieder von  $S$  zu  $T$  über, so gibt Gl. (8) die Bogenbeweglichkeit bei Änderungen  $dT_a/dt$  der Temperaturverteilung zu  $2\pi R \kappa(T_a)/L$ . Danach wächst die Beweglichkeit mit der Wärmeleitfähigkeit an der Stelle der Störung und sinkt mit steigender Leistung. Sie ist also in dieser Näherung unabhängig von Stromstärke und Feldstärke im einzelnen.

### 3.2. Lösung für $\sigma(S) = AS$

Die Annahme einer nichtleitenden Zone im äußeren Bereich des Bogens soll nun fallengelassen werden. Vielmehr soll die Energiegleichung für den Fall der linearen Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit vom Wärmestrompotential

$$\sigma(S) = AS \quad (9)$$

exakt gelöst werden. Damit werden dann auch größere Verschiebungen zugelassen. Mit  $k^2 = A(ER)^2$  ergibt sich aus Gl. (4):

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial S}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} + k^2 S = 0. \quad (10)$$

Gesucht wird die Lösung, die auf dem Rand vorgeschriebene Werte annimmt. Dieses inhomogene Randwertproblem hat nur für bestimmte Werte des Parameters  $k^2$ , den Eigenwerten, Lösungen. Da die Differentialgleichung (10) linear ist, kann man zu ihrer Lösung den Produktansatz

$$S(\varrho, \varphi) = R(\varrho) F(\varphi) \quad (11)$$

machen, der zu der Lösung

$$S(\varrho, \varphi) = \sum_n c_n J_n(k\varrho) \cos(n\varphi - \varphi_n) \quad (12)$$

führt.  $J_n$  ist die Besselsche Funktion  $n$ -ter Ordnung erster Gattung,  $c_n$  und  $\varphi_n$  sind Integrationskonstanten, die aus der Randbedingung bestimmt werden müssen. Da die für  $\varrho = 1$  vorgeschriebene Verteilung von  $S$  periodisch mit der Periode  $2\pi$  ist, kann man

sie in eine Fourier-Reihe entwickeln:

$$S(1, \varphi) = \sum_n a_n \cos(n\varphi - \varphi_n). \quad (13)$$

Durch Vergleich der Koeffizienten von  $\cos(n\varphi - \varphi_n)$  in Gl. (12) mit  $\varrho = 1$  und Gl. (13) erhält man schließlich für die Lösung des Randwertproblems:

$$S(\varrho, \varphi) = \sum_n \frac{a_n J_n(k\varrho)}{J_n(k)} \cos(n\varphi - \varphi_n). \quad (14)$$

Für den Fall einer einfachen cos-Verteilung mit der Amplitude  $a_1 = S_a$  und dem Mittelwert  $a_0 = \bar{S}$  liefert Gl. (14) die  $S$ -Verteilung:

$$S(\varrho, \varphi) = \bar{S} \frac{J_0(k\varrho)}{J_0(k)} + S_a \frac{J_1(k\varrho)}{J_1(k)} \cos \varphi. \quad (15)$$

Wegen der Symmetrie der Lösung (15) bezüglich  $\varphi = 0$  liegt das Maximum der  $S$ -Verteilung auf der Geraden  $\varphi = 0$ . Aus den Gleichungen

$$\left( \frac{dS(\varrho, 0)}{d\varrho} \right)_{\varrho=\varrho_e} = 0 \quad (16)$$

und

$$L = - \int_0^{2\pi} \left( \frac{dS}{d\varrho} \right)_{\varrho=1} d\varphi \quad (17)$$

ergibt sich für  $\varrho_e$  die transzendente Gleichung

$$\frac{2\pi S_a k \varrho_e}{2\pi S_a + L \varrho_e} = \frac{J_1(k\varrho_e)}{J_0(k\varrho_e)}. \quad (18)$$

Der durch Gl. (18) gegebene Zusammenhang zwischen  $\varrho_e$  und  $2\pi S_a/L$  ist in Abb. 1 als gestrichelte Kurve dargestellt. Dabei wurde der über  $k$  nur schwach eingehende Parameter  $\bar{S}/L = S_a/L$  gesetzt. Für  $2\pi S_a/L \ll 1$  resultiert wieder die frühere Lösung Gl. (7 b).

### 3.3. Numerische Lösungen

Geht man nun von der vorher angenommenen Proportionalität zwischen  $\sigma$  und  $S$  über zu der realistischen Materialfunktion  $\sigma(S)$ , so wird durch deren Nichtlinearität die Lösung des Problems sehr erschwert, denn für nichtlineare Differentialgleichungen führen Produktansätze nur selten zum Ziel. Die Superposition von Partikularlösungen zur Konstruktion neuer Lösungen ist prinzipiell nicht mehr möglich. Wegen dieser Schwierigkeiten wird die Energiegleichung numerisch gelöst.

Die stationäre Energiebilanz lautet bei Verwendung des Laplace-Operators:

$$\Delta S + (ER)^2 \sigma(S) = 0. \quad (19)$$

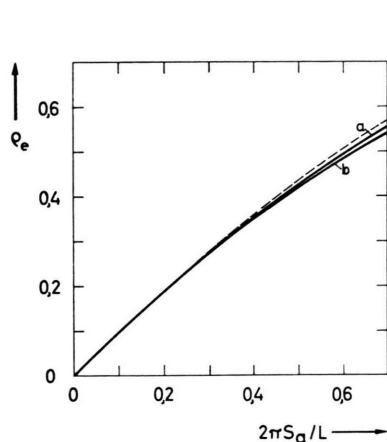


Abb. 1.  $q_e$  als Funktion von  $2\pi S_a/L$  für die cos-förmige Randverteilung. Kurve a: Ergebnis der numerischen Rechnung für  $S(0,0)=4$  W/cm, Kurve b: Ergebnis der numerischen Rechnung für  $S(0,0)=1$  W/cm. Gestrichelte Kurve: Ergebnis für  $\sigma(S)=AS$ .

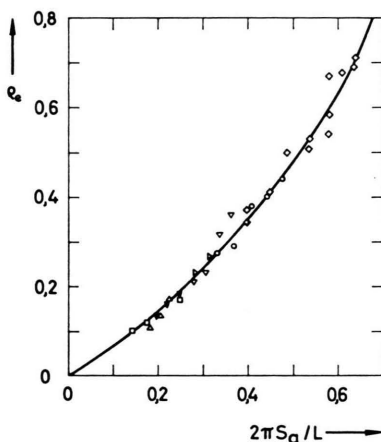


Abb. 2. Vergleich zwischen der Theorie (durchgezogene Kurve) und den Meßwerten von  $q_e$  für Ar. Meßwerte für verschiedene Bogenströme sind verschieden gekennzeichnet.

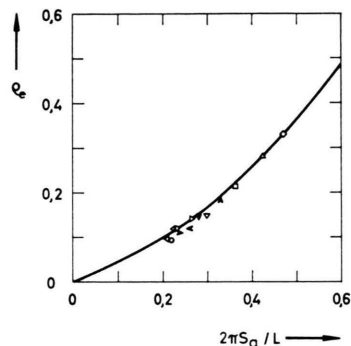


Abb. 3. Vergleich zwischen der Theorie (durchgezogene Kurve) und den Meßwerten von  $q_e$  für Ar+He (60 : 40). Meßwerte für verschiedene Bogenströme sind verschieden gekennzeichnet.

Diese Gleichung wird mit Hilfe der Greenschen Funktion der zweidimensionalen Potentialgleichung in eine nichtlineare Integralgleichung umgeformt<sup>1</sup>:

$$\frac{S(\varrho, \varphi) - S_p(\varrho, \varphi)}{S(0,0) - S_p(0,0)} = - \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^1 G(\varrho, \varphi; \varrho', \varphi') \sigma(S) \varrho' d\varrho' d\varphi'}{\int_0^{2\pi} \int_0^1 \ln \varrho' \sigma(S) \varrho' d\varrho' d\varphi'} \quad (20)$$

Dabei ist in Abhängigkeit von den Quellpunktkoordinaten  $\varrho'$ ,  $\varphi'$  und den Aufpunktkoordinaten  $\varrho$ ,  $\varphi$

$$G(\varrho, \varphi; \varrho', \varphi') = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + (\varrho \varrho')^2 - 2 \varrho \varrho' \cos(\varphi - \varphi')}{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2 \varrho \varrho' \cos(\varphi - \varphi')} \quad (21)$$

die Greensche Funktion der zweidimensionalen Potentialgleichung für das Innere des Einheitskreises.

$S_p(\varrho, \varphi)$  ist die Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung, welche die gleichen Randwerte annimmt wie die Funktion  $S(\varrho, \varphi)$ . Der Wert des Wärmestrompotentials in der Rohrachse  $S(0,0)$  wurde eingeführt, um den Parameter  $E$  zu eliminieren, dessen Vorgabe die Lösung von Gl. (19) nicht immer eindeutig bestimmt.

Die nichtlineare Integralgleichung (20) kann man nach dem Verfahren der sukzessiven Approximation lösen. Eine Näherungslösung für  $S(\varrho, \varphi)$  in die rechte Seite von Gl. (20) eingesetzt, ergibt eine verbesserte Lösung. Dieses Verfahren wird wiederholt,

bis sich zwei aufeinanderfolgende Ergebnisse für  $S(\varrho, \varphi)$  im ganzen Bereich nur noch um einen vorgegebenen Fehler unterscheiden.

Nach diesem Verfahren wird die Energiegleichung mit den Materialfunktionen der bei den Experimenten verwendeten Gase (Ar und ein Gemisch aus Ar und He) für die cos-förmige Randverteilung (7 a) mit  $S_a = \bar{S}$  gelöst. Das Ergebnis  $q_e(2\pi S_a/L)$  mit  $\sigma(S)$  von Argon ist in Abb. 1 aufgetragen. Die Rechnung wurde für die beiden Achsenwerte

$$S(0,0) = 1 \text{ W/cm und } 4 \text{ W/cm}$$

durchgeführt. Für größere Werte von  $q_e$  erkennt man eine geringe Abhängigkeit des Ergebnisses von  $S(0,0)$  bei gleichen Werten von  $2\pi S_a/L$ , die eine typische Konsequenz der Nichtlinearität der Differentialgleichung (19) ist. Physikalisch gesehen bedeutet dies einen geringen Einfluß des Bogenstromes  $I$  und der Gasart auf die Größe der Verschiebung. Ein Vergleich mit dem Ergebnis für die lineare Materialfunktion  $\sigma(S) = AS$  zeigt, daß die Größe der Verschiebung kaum von der genauen Form der Materialfunktion  $\sigma(S)$  abhängt.

Beim Experiment wird ein Teil der Rohrwand durch ein schmales Wolframband aufgeheizt. Diese

<sup>1</sup> FRANK, v. MISES, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. I. Mathematischer Teil. Verlag F. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, und Dover Publications, Inc., New York 1961.



Maßnahme kann man sich aus einer Erhöhung des Mittelwertes der Wandtemperatur, die zu keiner Verschiebung führt, und einer Störung mit verschwindendem Mittelwert zusammengesetzt denken. Insgesamt kann man eine solche Verteilung gut durch die glockenförmige Kurve

$$S(1, \varphi) = 2 S_a \cdot \exp\{- (\varphi/b)^2\} \quad (22)$$

darstellen. Mit diesen Randwerten wird die Energiebilanz ebenfalls numerisch gelöst. Für die Breite  $b$  werden je nach der verwendeten Apparatur die Werte  $b=0,4$  und  $0,6$  eingesetzt. Als Ergebnis dieser Rechnungen ist in den Abb. 2 und 3 die Verschiebung  $\varrho_e$  aufgetragen (durchgezogene Kurven). Um eine Vorstellung von der Deformation der Isothermen zu vermitteln, sind diese in Abb. 4 für einen Argonbogen mit  $I=1$  A und  $S_a=0,45$  W/cm aufgezeichnet.

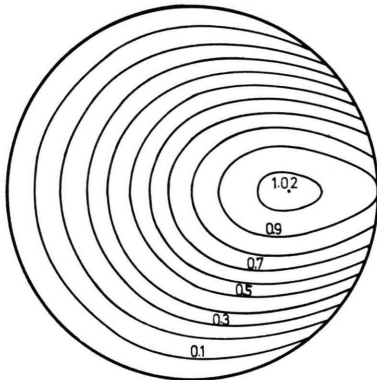


Abb. 4. Isothermen eines Argon-Bogens bei der Randverteilung  $S(1, \varphi) = 2 S_a \cdot \exp\{- (\varphi/b)^2\}$ .  $I=1$  A,  $S_a=0,45$  W/cm,  $b=0,6$ .

### 3.4. Experimentelle Untersuchungen über die Verschiebung zylindrischer Lichtbögen

#### 3.4.1. Experimentelle Anordnung

In einem gekühlten Glasrohr brennt ein Niederstrombogen zwischen zwei Wolframelektroden bei Atmosphärendruck. An einer Seite sind längs der Rohrwand axial hintereinander zwei schmale Wolframbänder gespannt. Diese Folien werden mit Wechselstrom der Frequenz 500 Hz aufgeheizt. Magnetischen Kräften mit dieser Frequenz kann der Bogen wegen seiner thermischen Trägheit nicht nachfolgen. Die Unterteilung der Bänder in zwei Hälften verhindert das Ansetzen des Bogens am Wolfram, da dann der Spannungsabfall längs eines Bandes nicht ausreicht, um einen neuen Anoden- und Kathodenfall zu bilden. Die experimentellen Untersuchungen werden an Bögen in Argon und in einem Gemisch aus 60% Argon und 40% Helium durchgeführt.

\* Abb. 5 und 8 auf Tafel S. 428 a.

#### 3.4.2. Messungen und Vergleich mit der Theorie

Ziel der Messungen ist die Bestimmung der Auslenkung der Bogensäule abhängig von der Größe  $2 \pi S_a/L$ . Zur Bestimmung von  $S_a$  wird die Temperatur der heißen Folien mit einem Pyrometer gemessen, während die Leistung  $L$  der Strom-Spannungscharakteristik des Bogens entnommen wird. Für eine Reihe von Leistungen und Wandtemperaturen werden von dem abgelenkten Bogen photographische Aufnahmen hergestellt, auf denen die Auslenkung mit Hilfe eines Mikrophotometers gemessen wird. Verglichen mit einer glühenden Wolframfolie von  $2000-2500^\circ\text{K}$  strahlen die verwendeten Niederstrombögen im sichtbaren Spektralbereich zu schwach, um genügend kontrastreiche Aufnahmen zu ergeben. Im UV strahlen jedoch Folien und Bogen vergleichbar stark, weswegen alle Aufnahmen mit einem UV-Filter durchgeführt werden. Als Beispiel zeigt Abb. 5 \* zwei übereinander kopierte Aufnahmen des Argonbogens ( $I=0,75$  A) bei ungeheizten Folien und bei heißen Folien ( $2160^\circ\text{K}$ ). Die Auslenkung des Bogens bei ungeheizten Folien ist auf die Störung der Kreiszyylindergeometrie durch die ebenen Folien und deren Halterung zurückzuführen. Folien und Halterung sollen einen Teil der Rohrwand ersetzen, können diese Aufgabe aber nur unvollkommen erfüllen, da sie nicht wie die Rohrwand gekrümmt sind. Deshalb ist der Bogen nicht so gut stabilisiert wie in einem vollkommen runden Rohr und wird durch die immer vorhandene Konvektionsströmung um eine kleine Strecke verschoben. Diese Lage wird als Nulllinie betrachtet, von der aus alle Ablenkungen gemessen werden. Bei der Auswertung wird der senkrechte Abstand der Bogenachse bei ungeheizten Folien von der Wolframoberfläche als Rohrradius  $R$  eingesetzt. An ihren Enden glühen die Folien etwas weniger, da sie durch ihre Einspannung gekühlt werden. Die dadurch entstehende geringere Auslenkung erkennt man als leichte Einsattelung in der Mitte der ausgelenkten Bogensäule. Die Auslenkungen werden jeweils in der Mitte der einzelnen Folien gemessen.

In den Abb. 2 und 3 sind die so gemessenen Auslenkungen als Funktion von  $2 \pi S_a/L$  aufgetragen. Die durchgezogenen Kurven stellen die Ergebnisse der numerischen Rechnungen dar. Bei allen Untersuchungen werden zwar Strömungen vernachlässigt, doch entsteht in der Apparatur immer eine Konvektionsströmung, deren Stromlinien einen Doppelwirbel bilden. Der Einfluß dieser Strömung wurde bei der Auswertung in der Festlegung der Nullage berücksichtigt. Aus der guten Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment kann man folgern, daß der Einfluß der Strömung sehr klein ist. Die theoretischen Untersuchungen ergaben, daß  $\varrho_e$  praktisch nur von der Größe  $S_a/L$  abhängt, dagegen kaum vom Strom  $I$  oder von anderen Parametern. In den Abb. 2 und 3 sind die Meßergebnisse für verschiedene Ströme gekennzeichnet. Im Rahmen der Meßgenauigkeit liegen alle Meßpunkte auf einer Kurve und bestätigen damit das Ergebnis der Theorie.

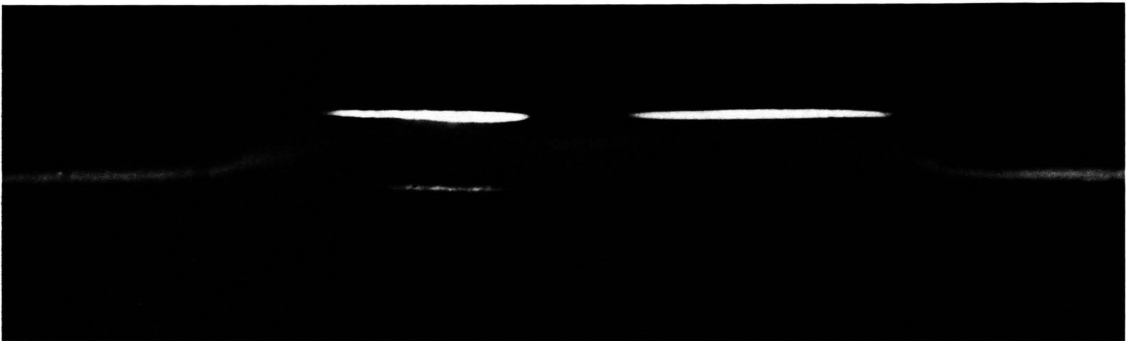


Abb. 5. Aufnahme des Bogens bei ungeheizten und bei geheizten Folien, übereinander kopiert.

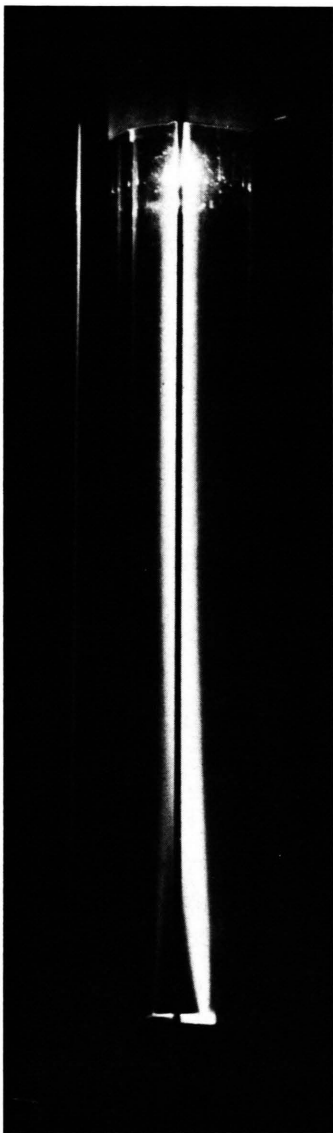


Abb. 8. Durch ortsabhängige elektrische und thermische Leitfähigkeit verschobener Bogen in  $\text{Ar}-\text{N}_2$ . Links von der Rohrmitte (schwarze Linie) erkennt man das Spiegelbild des abgelenkten Bogens.



#### 4. Verschiebung durch ortsabhängige Materialfunktionen

##### 4.1. Lage des Temperaturmaximums bei ortsabhängiger elektrischer Leitfähigkeit

Im Gegensatz zu der bisher behandelten Unsymmetrie der Abkühlungsverhältnisse kann eine Verschiebung des Lichtbogens auch durch unsymmetrische Energiezufuhr  $\sigma E^2$  bewirkt werden. Dabei ist wichtig, daß  $E$  sich zwar bei der Verschiebung gegenüber dem zylindersymmetrischen Fall ändern kann, wegen  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  aber auch weiterhin über den Querschnitt konstant ist. Wenn die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  nur von  $T$  bzw.  $S$  abhängt, kann die Heizung in der Umgebung des Temperaturmaximums nicht unsymmetrisch gemacht werden, da

$$(\text{grad } \sigma)_{\text{Max}} = (d\sigma/dS)_{\text{Max}} \cdot (\text{grad } S)_{\text{Max}} = 0.$$

Daher wird  $\sigma$  als Produkt einer Ortsfunktion  $s(\varrho, \varphi)$  mit einer Funktion  $F(S)$  angesetzt:

$$\sigma(S, \varrho, \varphi) = s(\varrho, \varphi) F(S). \quad (23)$$

Um eine lineare Störungsrechnung durchführen zu können, wird  $s(\varrho, \varphi)$  als schwach vom Ort abhängige Funktion in der Form

$$s(\varrho, \varphi) = s(x) = 1 + \varepsilon x = 1 + \varepsilon \varrho R \cos \varphi \quad (24)$$

mit  $\varepsilon R \ll 1$  angenommen. Wie eine kurze Rechnung zeigt, kann man den Parameter  $\varepsilon$  als das Verhältnis von  $|\text{grad } \sigma|$  zu  $\sigma$  am Ort des Temperaturmaximums deuten:

$$\varepsilon = \left( \frac{|\text{grad } \sigma|}{\sigma} \right)_{\text{Max}}. \quad (25)$$

Zur Lösung der Energiegleichung

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial S}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} + (ER)^2 (1 + \varepsilon R \varrho \cos \varphi) F(S) = 0 \quad (26)$$

wird eine Linearisierung mit folgenden Ansätzen durchgeführt:

$$S(\varrho, \varphi) = S_z(\varrho) + S^*(\varrho, \varphi), \quad |S^*| \ll S_z, \quad (27a)$$

$$E = E_z + E^*, \quad |E^*| \ll E. \quad (27b)$$

$S_z(\varrho)$  ist die bei  $\varrho = 1$  verschwindende zylindersymmetrische Lösung von (26) mit  $E = E_z$  und  $\varepsilon = 0$ . Für sie gilt in der Umgebung von  $\varrho = 0$  die Reihenentwicklung

$$S_z(\varrho) = S_0 - \frac{1}{4} (E_z R)^2 F(S_0) \varrho^2. \quad (28)$$

Einführung von (27a) und (27b) in (26) ergibt in linearer Näherung für  $S^*$  die Differentialgleichung

chung

$$\frac{\partial^2 S^*}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial S^*}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 S^*}{\partial \varphi^2} + \frac{d\bar{F}}{dS} (R E_z)^2 S^* = -\bar{F} (R E_z)^2 \left( 2 \frac{E}{E_z} + \varepsilon R \varrho \cos \varphi \right). \quad (29)$$

Zur weiteren Vereinfachung wurden dabei noch die Ortsfunktionen  $F(S_z)$  und  $(dF/dS)_{S=S_z}$  durch die Mittelwerte  $\bar{F}$  und  $d\bar{F}/dS$  ersetzt. Die Lösung von (29) muß die Randbedingungen

$$S^*(0, \varphi) = S^*(1, \varphi) = 0 \quad (30)$$

erfüllen.  $S^*$  kann man aus einer Lösung der homogenen Gl. (29) und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung zusammensetzen. Die Rechnung, bei der von der speziellen Lösung nur der erste Term berücksichtigt wurde, und die Erfüllung der Randbedingungen (30) führt zu den Ergebnissen:

$$S^*(\varrho, \varphi) = \frac{1}{8} \varepsilon R \bar{F} (E_z R)^2 \left( \frac{J_1(k \varrho)}{J_1(k)} - \varrho^3 \right) \cos \varphi \quad (31)$$

und

$$E^* = 0$$

[ $k^2 = (E_z R)^2 d\bar{F}/dS$ ,  $J_1$  ist die Bessel-Funktion 1. Ordnung 1. Gattung].

In erster Näherung wird also die elektrische Feldstärke durch die Unsymmetrie der Leitfähigkeit und damit der Heizung nicht geändert. Das Maximum der vollständigen Lösung [Summe der Gln. (28) und (31)]

$$S(\varrho, \varphi) = S_z(\varrho) + S^*(\varrho, \varphi)$$

liegt auf der Geraden  $\varphi = 0$  bei:

$$(\varrho_e)_{\text{el}} = p R \varepsilon = p R \left( \frac{|\text{grad } \sigma|}{\sigma} \right)_{\text{Max}} \quad (32)$$

mit  $p = k \bar{F}/8 J_1(k) F(S_0)$ . Der Zahlenfaktor  $p$  ergibt sich für:

$$\begin{aligned} F = \text{const} & \quad \text{zu} \quad p = 1/4, \\ F \propto S & \quad \text{zu} \quad p = 0,28. \end{aligned}$$

Auch höhere Potenzen von  $S$  in  $F(S)$  ergeben für  $p$  in guter Näherung den Wert  $p = 0,25$ . Numerische Lösungen von (26) mit dem in Abschnitt 3.3 beschriebenen Verfahren bestätigen die Ergebnisse der linearen Näherung. Man kann deshalb kleine Verschiebungen mit guter Genauigkeit nach der Formel

$$(\varrho_e)_{\text{el}} \approx \frac{1}{4} R \left( \frac{|\text{grad } \sigma|}{\sigma} \right)_{\text{Max}} \quad (32a)$$

berechnen.



Den experimentellen Gegebenheiten (Abschnitt 4.4.1) entspricht allerdings eine Ortsfunktion  $s(\varrho, \varphi)$  besser, die in den beiden Querschnittshälften ( $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$  und  $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ ) jeweils konstante, aber voneinander verschiedene Werte annimmt. Das bedeutet eine sprunghafte Änderung von  $\sigma$  an der Grenze der beiden Bereiche, die mit 1 und 2 gekennzeichnet werden:

$$\sigma_{1,2} = c_{1,2} F(S). \quad (33)$$

Um grundsätzlich die Abhängigkeit der Verschiebung von der Funktion  $F(S)$  zu erkennen, sollen nun zwei Extremfälle betrachtet werden.

Wenn  $F$  konstant ist, verschiebt sich der Bogen für ein bestimmtes Verhältnis  $c_1/c_2$  um eine Strecke  $\varrho_e$  in den besser leitenden Bereich hinein. Da der gesamte Querschnitt Strom leitet, ist der Einfluß der räumlichen Unsymmetrie besonders stark. Der andere Extremfall besteht in einem starken Anstieg von  $F(S)$  mit  $S$ . Der Durchmesser des leitfähigen Bereiches ist dann nur klein. Deshalb verschiebt sich der Bogen nur um eine Strecke von der Größenordnung des Leitfähigkeitsradius in den besser leitenden Bereich hinein.

Eine mit  $S$  ansteigende Funktion kann man z. B. durch

$$F(S) = S^n \quad n > 0 \quad (34)$$

darstellen. Um den bisher nur qualitativ erkannten Zusammenhang noch quantitativ zu ergänzen, wird die Energiegleichung mit  $\sigma$  nach den Gln. (33) und (34) für  $n=0$ ; 2 und 4 gelöst. Als Ergebnis dieser Rechnungen ist in Abb. 6 die Verschiebung  $(\varrho_e)_{el}$  als Funktion des relativen Sprunges der elektrischen Leitfähigkeit

$$u_{el} = (c_2 - c_1)/(c_2 + c_1) \quad (35)$$

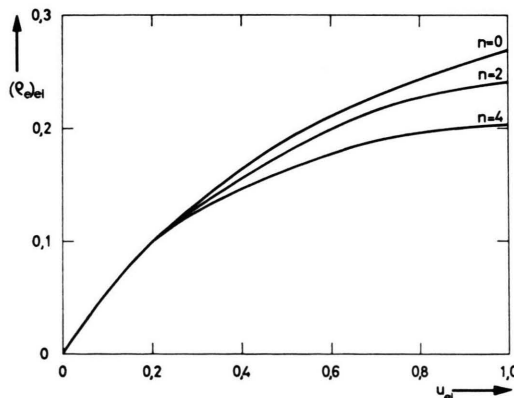


Abb. 6. Verschiebung  $(\varrho_e)_{el}$  für  $n=0, 2$  und  $4$ .

aufgetragen. Man erkennt, daß die Steilheit der Funktion  $F(S)$  nur für  $u > 0,2$  eine gewisse Rolle spielt, darunter hängt  $(\varrho_e)_{el}$  praktisch nicht von  $n$  ab. Da die Abhängigkeit von  $n$  insgesamt nicht sehr groß ist, kann man  $(\varrho_e)_{el}$  in erster Näherung nach der Formel für  $F = \text{const}$  ( $n=0$ ) berechnen:

$$(\varrho_e)_{el} = 0,64 \frac{u_{el}}{1 + 1,45 u_{el}}. \quad (36)$$

Dieses Ergebnis erhält man aus der für  $n=0$  noch analytisch durchführbaren Lösung der Energiebilanz, die sich dafür auf eine Poissonsche Differentialgleichung reduziert. Die Kurven für  $n=2$  und  $4$  sind Ergebnisse einer numerischen Lösung mit dem Verfahren nach Abschnitt 3.3.

#### 4.2. Lage des Temperaturmaximums bei ortsabhängiger Wärmeleitfähigkeit

Wenn man die Berechnung der Verschiebung des Bogens durch ortsabhängige elektrische Leitfähigkeit nicht für den zylindrischen Fall durchführt, sondern nur ein eindimensionales Modell wählt, bei dem der Bogen zwischen zwei parallelen Wänden brennt, erhält man ein Ergebnis, das sich numerisch vom zylindrischen Fall kaum unterscheidet. Wegen dieser Unempfindlichkeit des Ergebnisses gegenüber dieser Änderung der Geometrie, wird das mathematisch in Zylinderkoordinaten ziemlich komplizierte Problem einer ortsabhängigen Wärmeleitfähigkeit durch die Untersuchung eines eindimensionalen Modells ersetzt. Die Größe der Wärmeleitfähigkeit soll sich in der Mitte zwischen den beiden parallelen Wänden sprunghaft ändern. Die Form der Temperaturabhängigkeit wird wieder in beiden Bereichen gleich angenommen. Die genaue Form der Temperaturabhängigkeit ist nicht wesentlich, da man sie durch Einführung eines Wärmestrompotentials vollständig aus der Rechnung eliminieren kann. Nach Durchführung der sehr einfachen Rechnung erhält man für die Verschiebung  $(\varrho_e)_{th}$  das Ergebnis:

$$(\varrho_e)_{th} = -\frac{1}{2} u_{th}, \quad (37)$$

wobei  $u_{th}$  wieder, wie im Fall der elektrischen Leitfähigkeit, als räumliche Unsymmetrie definiert ist. Das negative Vorzeichen von  $(\varrho_e)_{th}$  für positive  $u_{th}$  beschreibt die Tatsache, daß der Bogen in Bereiche mit schlechterer Wärmeleitfähigkeit wandert.

#### 4.3. Lage des Temperaturmaximums bei ortsabhängiger elektrischer und thermischer Leitfähigkeit

Ortsabhängigkeit der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit tritt auf, wenn man einen Lichtbogen

in der Mischzone verschiedener Gase betreibt. Dabei spielen der elektrische und der thermische Effekt im allgemeinen gleichzeitig eine wesentliche Rolle. Rechnungen an dem eindimensionalen Modell zeigen, daß man die durch die beiden Effekte verursachten Auslenkungen einfach linear überlagern kann, wenn diese nicht allzu groß sind. Im Bereich der experimentell möglichen Verschiebungen stellt die lineare Überlagerung eine gute Näherung dar. Zum Vergleich mit dem Experiment wird also die gesamte Verschiebung  $\varrho_e$  nach der Formel

$$\varrho_e = (\varrho_e)_{el} + (\varrho_e)_{th} = \frac{0,64 u_{el}}{1 + 1,45 u_{el}} - 0,5 u_{th} \quad (38)$$

berechnet. Da der Bogen zum Ort besserer elektrischer Leitfähigkeit hin läuft, von Bereichen guter Wärmeleitfähigkeit aber abgestoßen wird, kann es vorkommen, daß die beiden Effekte sich mehr oder minder stark kompensieren. Dies ist dann der Fall, wenn das eine Gas elektrisch und thermisch sehr gut, das andere aber elektrisch und thermisch schlecht leitet.  $(\varrho_e)_{el}$  und  $(\varrho_e)_{th}$  haben dann verschiedene Vorzeichen und wirken gegeneinander.

#### 4.4. Experimentelle Untersuchung der Verschiebung durch ortsabhängige elektrische und thermische Leitfähigkeit

##### 4.4.1. Experimentelle Anordnung

Eine schematische Darstellung der verwendeten Apparatur zeigt Abb. 7. Der Bogen brennt in einem wassergekühlten Quarzrohr. Als Kathode dient ein ange-

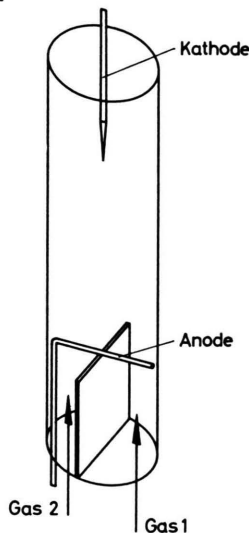


Abb. 7. Schematische Darstellung der Apparatur für die Untersuchungen bei ortsabhängiger elektrischer und thermischer Leitfähigkeit.

spitzter Stift aus Wolfram, während die Anode aus einem Wolframbügel besteht, dessen Dicke so gewählt ist, daß er durch den Anodenansatz vollständig zum Glühen gebracht wird. Auf diesem glühenden Bügel ist der Bogenansatz so leicht beweglich, daß er Verschiebungen der Säule widerstandslos nachfolgen kann. Unmittelbar unterhalb der Anode wird das Entladungsrrohr durch ein Blech aus Tantal in zwei Hälften geteilt, durch die zwei verschiedene Gase mit gleicher Geschwindigkeit in den Bogenraum einströmen. Bei den Versuchen werden die beiden Gaspaare Ar+He(60:40)-Argon und Argon-Stickstoff verwendet. Unmittelbar hinter der Trennwand beginnt die Diffusion der Gase ineinander.

##### 4.4.2. Messungen und Vergleich mit der Theorie

Für eine Reihe von Strömungsgeschwindigkeiten werden photographische Aufnahmen von den Lichtbögen in den beiden verwendeten Gaspaaren gemacht. Auf diesen Bildern wird die Auslenkung der Bogensäule aus der Rohrmitte unmittelbar hinter der Trennwand gemessen. Abb. 8 zeigt eine Aufnahme für das System Argon-Stickstoff (rechts von der schwarz markierten Rohrmitte strömt Argon ein). Die Messung ergibt, daß die Auslenkung in einem weiten Bereich unabhängig von der Geschwindigkeit ist, mit der die beiden Gase strömen. In beiden Gaspaaren ergibt sich die Auslenkung zu  $\varrho_e = 0,5$ . Die Unabhängigkeit der Meßwerte von der Strömungsgeschwindigkeit zeigt, daß die Verschiebung wirklich durch die Ortsabhängigkeit der elektrischen und thermischen Daten verursacht wird, nicht aber durch die axiale Gasströmung. Die Ergebnisse der Abschnitte 4.1., 4.2. und 4.3. ergeben die theoretischen Werte der Verschiebungen zu  $\varrho_e = 0,37$  für Ar-N<sub>2</sub> und  $\varrho_e = 0,42$  für Ar-(Ar+He). Die Unterschiede zwischen Experiment und Theorie sind sicher im Näherungscharakter der verwendeten, überaus einfachen Modelle begründet. Die etwas bessere Übereinstimmung für das System Ar-(Ar+He) erklärt sich wahrscheinlich dadurch, daß die Annahme gleicher Temperaturabhängigkeit der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit bei den beiden Edelgasen Argon und Helium besser erfüllt ist als bei der Kombination aus dem Edelgas Argon und dem Molekülgas Stickstoff. Bei Stickstoff steigt die Wärmeleitfähigkeit über 4000 °K viel stärker an als bei Argon, da hier die Dissoziation einsetzt.

## 5. Schlußbemerkung

Auf Grund der theoretischen und experimentellen Untersuchungen kann man sagen, daß ein Bogen nicht nur durch die Bewegung des Bogengases verschoben werden kann, sondern auch durch Unsymmetrie der Heizungs- und Abkühlungsverhältnisse. Beispielsweise kann der Fall unsymmetrischer Hei-

zung dadurch verwirklicht werden, daß die elektrische Leitfähigkeit nicht nur von der Temperatur, sondern auch mit einer Vorzugsrichtung vom Ort abhängt. Ähnlich kann man eine unsymmetrische Kühlung durch eine ortsabhängige Wärmeleitfähigkeit erzielen. Auch eine unsymmetrische Verteilung der Wandtemperatur wirkt als Kühlung in Vorzugsrichtung. Die bei den Experimenten unvermeidlichen Ausgleichsströmungen, Konvektionsströmungen und Gasströmungen zur Erzeugung einer Mischzone spie-

len nur die Rolle einer Störung der reinen Bogenverschiebung.

Herrn Prof. Dr. H. MAECKER danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine Unterstützung bei ihrer Durchführung. Ebenfalls bedanke ich mich bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die durch ein Stipendium diese Arbeit ermöglichte. Außerdem danke ich für die Möglichkeit zur Durchführung aller numerischen Rechnungen auf der elektronischen Rechenanlage der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München.

## Die Wechselwirkungsenergie eines Systems von drei H-Atomen <sup>\*</sup>, <sup>\*\*</sup>

RUDOLF WRZESINSKY

Institut für Theoretische Physik (I) der Philipps-Universität, Marburg (Lahn)

(Z. Naturforsch. 23 a, 432—445 [1968]; eingegangen am 17. Juli 1967)

Unter Benutzung der Valenzstrukturmethode werden die beiden tiefsten Terme und die entsprechenden Eigenfunktionen eines  $H_3$ -Systems ermittelt in Abhängigkeit von der Lage der drei Kerne. Ziel dieser Arbeit ist es, vermöge eines einfach zu handhabenden Rechenverfahrens einen allgemeinen Überblick über die globale Struktur der Energieflächen zu geben.

### 1. Einleitung

Eine theoretische Behandlung von Fragen der chemischen Reaktionskinetik bzw. von Streuproblemen zwischen Molekülen setzt zunächst die Kenntnis der chemischen Kraftwirkungen voraus, die die einzelnen Reaktionspartner aufeinander ausüben. Im Prinzip sind diese Kräfte durch die Quantenmechanik gegeben, bei der expliziten Berechnung stößt man jedoch auf Schwierigkeiten. Als relativ einfaches Beispiel ist die Streuung von H-Atomen an  $H_2$ -Molekülen von Interesse, wobei neben der rein elastischen Streuung noch Umordnungsstöße sowie Anregung der Rotations- und Schwingungsfreiheitsgrade des  $H_2$ -Moleküls und Dissoziation auftreten können. Ferner besteht die Möglichkeit elektronischer Anregung.

Ganz allgemein haben wir es zu tun mit dem dynamischen Problem der Bewegung von drei Proto-

nen und drei Elektronen, wobei es im allgemeinen ausreichend ist, nur die elektrostatischen Kräfte zwischen diesen Teilchen zu betrachten. Infolge des großen Unterschiedes zwischen Protonenmasse und Elektronenmasse ist es sinnvoll, nach der Methode von BORN <sup>2,3</sup> ein Gleichungssystem zu betrachten, nach dem sich die drei Kerne in einem System von Potentialen bewegen, das durch die der jeweiligen Kernkonstellation entsprechende elektronische Energie gegeben ist. Durch Zusatzterme sind die Bewegungen in den einzelnen Energieflächen miteinander verknüpft. Voraussetzung für eine Untersuchung des Stoßproblems ist dann die Kenntnis dieser Energieflächen und Kopplungskoeffizienten. Zur Bestimmung der Kopplungskoeffizienten ist es nötig, die elektronischen Eigenfunktionen zu kennen.

In der Literatur liegen lediglich für einige wenige spezielle Kernkonfigurationen Werte für die niedrigsten beiden Terme des  $H_3$ -Systems vor, HIRSCHFEL-

<sup>\*</sup> Auszug aus der Dissertation des Verfassers <sup>1</sup>.

<sup>\*\*</sup> Mit finanzieller Unterstützung durch European Office of Aero Space Research, United States Air Force, Grant AF EOAR 61-22.

<sup>1</sup> R. WRZESINSKY, Dissertation Philipps-Universität Marburg 1964, Final Technical Report AF EOAR 61-22 (1965); European Office, Aerospace Research, US Air Force.

<sup>2</sup> M. BORN, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Mat.-Phys. Kl. IIa (1951), Nr. 6.

<sup>3</sup> M. BORN u. K. HUANG, Dynamical Theory of Crystal Lattices, Oxford Univ. Press, London 1956, p. 402.

<sup>4</sup> J. O. HIRSCHFELDER, Ph. D. Thesis, Princeton Univ. 1935.